Analyse du Modèle à 1 effet Aléatoire

$$Y_{ij} = \mu + A_i + E_{ij}$$

$i = 1, I$ $\qquad A_i \sim N(0, \sigma_A^2)$

$j = 1, n_i$ $\qquad E_{ij} \sim N(0, \sigma_E^2)$

$\left\{ \begin{array}{l} A_i \perp\!\!\!\perp E_{ij} \\ E_{ij} \text{ iid.} \end{array} \right.$

↗ n_i = cste : équilibré (balanced)

↘ $n_i \neq$ cste.

→ Modèle le plus simple dans lequel on peut faire "tous" les calculs.

→ objectifs :
- estimer μ : OLS ? GLS ?
- estimer σ_A^2, σ_E^2 : ANOVA, LM, REML ?
- "estimer" / prédire A_i
- tester l'effet Aléatoire.

Notations Matricielles :

- $\mathbb{1}_n$ = vecteur $(n\times 1)$ rempli de 1 : $J_n = \mathbb{1}_n' \mathbb{1}_n$
- Produit Tensoriel : $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1c}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}B & \cdots & a_{rc}B \end{bmatrix}$

  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,r \\ j=1,c}}$
- Sommes directes : $A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

Identités utiles : $\begin{cases} (A\otimes B)' = A' \otimes B' \\ (A\otimes B)^{-1} = (A^{-1})\otimes(B^{-1}) \\ tr(A\otimes B) = tr(A)\, tr(B) \end{cases}$

- Pour les individus du niveau i

$$Y_i = \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ \vdots \\ Y_{in_i} \end{bmatrix} = \mu \times \mathbb{1}_{n_i} + \mathbb{1}_{n_i} \times A_i + E_i$$

$$\underbrace{Y}_{(\Sigma n_i \times 1)} = \underbrace{\mathbb{1}_{\Sigma n_i}}_{[\Sigma n_i \times 1]} \underbrace{\mu}_{1\times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbb{1}_{n_I} \end{bmatrix}}_{\Sigma n_i \times I} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_I \end{bmatrix}}_{I\times 1} \cancel{[A_1 \cdots A_I]} + E$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbb{1}_{n_I} \end{bmatrix} = \left[Id_I \otimes \mathbb{1}_{n_i} \right]$$

↳ $Y = \mathbb{1}_N \mu + \left[Id_I \otimes \mathbb{1}_{n_i} \right]_i A + E$

$Y = X\mu + ZA + E$

→ Si on considère les A comme des paramètres

$\beta = [\mu, A_1 \ldots A_I]$

$$X = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_N & \mathbb{1}_{n_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{1}_{n_I} \end{bmatrix} = [\underbrace{X_\mu}_{\text{design } \mu} \quad \underbrace{X_A}_{\text{design } A}].$$

$Y = X\beta + E$

↳ écriture "classique" mais pas homoscédastique

→ $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X\beta + E) = \mathbb{V}(ZA + E) = Z\mathbb{V}(A)Z' + \mathbb{V}(E)$

$= \sigma_A^2 \{J_{n_i}\}_i + \sigma^2 \{Id_{n_i}\}_i$

→ le "Bloc" i $= \begin{bmatrix} \sigma_A^2 + \sigma_E^2 & & \sigma_A^2 \\ & \ddots & \\ \sigma_A^2 & & \sigma_A^2 + \sigma_E^2 \end{bmatrix}$

Corrélation intra bloc

variance totale.

Estimation du paramètre d'espérance.

- On est dans le cas $Y = X\beta + E$, $\mathbb{V}(Y) = V$

on suppose V connue. et $\beta = \mu \Rightarrow$ un seul paramètre d'espérance.

<u>Rappel</u> : . estimateur OLS : $S(\beta) = \|Y - X\beta\|^2$

On choisit $\hat{\beta}$ qui minimise $S(\beta)$.

$$\hat{\beta}_{OLS} = ({}^tXX)^{-}\,{}^tXY.$$

↳ GLS : Generalized Least Square.

↳ On généralise l'approche OLS au cas V connue.

$$S(\beta) = \|Y - X\beta\|^2_{V^{-1}}$$

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-}\,{}^tXV^{-1}Y.$$

Idée : On "normalise / réduit" les résidus ; $V^{-1/2}Y = V^{-1/2}X\beta + V^{-1/2}E$

$$\tilde{Y} = V^{-1/2}Y \qquad \tilde{Y} = \tilde{X}\beta + \tilde{E}$$

$$\tilde{X} = V^{-1/2}X$$

$$\tilde{E} = V^{-1/2}E$$

→ V est une matrice de variance symétrique semi définie positive ⇒ On peut la diagonaliser

Rappel sur l'Estimateur OLS.

$$S(\beta) = \| Y - E(Y) \|^2 = \| Y - X\beta \|^2.$$

$\hat{\beta}$ OLSE minimise $S(\beta) \Rightarrow$

$$\hat{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \| Y - X\beta \|^2.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2\,{}^tX (Y - X\beta) = 0 \Rightarrow \boxed{{}^tXX\hat{\beta} = {}^tXY} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta^2} = 2\,{}^tXX. \end{cases}$$

Rappel : $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(a'x) = a \quad (a, x \in \mathbb{R}^d) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}(x'Ax) = 2Ax \end{cases}$

$\rightarrow$ si $rg(X) = p$ (plein rg), alors $({}^tXX)$ est inversible

et $\hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tXY$.

• Interpretation géométrique $\mathcal{L}(X) =$ EV engendré par les colonnes de X

↳ tt. element de $\mathcal{L}(X)$ s'écrit ĉ une comb. lin. des $x^{(j)}$ $\quad X = \{x^{(1)} \dots x^{(p)}\}$

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \| Y - X\beta \|^2 = \min_{v \in \mathcal{L}(X)} \| Y - v \|^2$$

la solut° $\hat{\beta}$ est le Projeté $\perp$ de Y sur $\mathcal{L}(X)$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} = PY \quad \text{et} \quad P = X({}^tXX)^{-1}\,{}^tX$$

$$V = P^{-1} \Lambda P = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} P$$

$$\Lambda^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \to V^{-1/2} = \Lambda^{-1/2} P$$

$$\mathbb{V}(\tilde{Y}) = \mathbb{V}(\Lambda^{-1/2} P Y) = \Lambda^{-1/2} P P^{-1} \Lambda P P^{-1} \Lambda^{-1/2} \times \sigma^2$$

→ Critique de cette approche : . $V^{-1/2} \times X$: interprétation ?

. V doit être inversée !

→ Inversion de V dans le cas Compound Symétrie utilise la relation :

$$\Big(\underbrace{a}_{\neq 0} I_n + \underbrace{b}_{a \neq -nb} J_n\Big)^{-1} = \frac{1}{a}\left(I_n - \frac{b}{a+nb} J_n\right)$$

$$\hookrightarrow V(Y)^{-1} = \left(\frac{1}{\sigma_e^2}\left(I_{n_i} - \frac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} J_{n_i}\right)\right)_i$$

(Bloc i).

Application à l'estimation de μ.

$$\bullet\ \hat{\mu}_{OLS} = \underbrace{(\mathbb{1}_n' \mathbb{1}_n)^{-1}}_{1/n} \underbrace{\mathbb{1}_n Y}_{\sum_{ij} Y_{ij}} = \frac{1}{n} \sum_i n_i Y_{i\bullet}.$$

On note
$$Y_{i+} = \sum_j Y_{ij}$$
$$Y_{i\bullet} = \frac{1}{n_i} \sum_j Y_{ij}$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{\mu}_{OLS} = \frac{1}{n} \sum_i n_i Y_{i\bullet}.}$$

$$\bullet\ \hat{\mu}_{GLS} = \underbrace{(\mathbb{1}_n' V^{-1} \mathbb{1}_n)^{-1}}\ \mathbb{1}_n' V^{-1} Y.$$

$$\mathbb{1}_n' V^{-1} \mathbb{1}_n = \sum_{i=1}^{I} \mathbb{1}_{n_i}' \left(\frac{1}{\sigma_e^2} \left[Id_{n_i} - \frac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} J_{n_i} \right] \right) \mathbb{1}_{n_i}$$

$$= \frac{1}{\sigma_e^2} \left(\sum_i \underbrace{\mathbb{1}_{n_i}' \mathbb{1}_{n_i}}_{n_i} - \frac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} \underbrace{\mathbb{1}_{n_i}' J_{n_i} \mathbb{1}_{n_i}}_{n_i^2} \right).$$

$$= \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_i n_i \left(1 - \frac{\sigma_A^2 n_i}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} \right)$$

$$= \sum_i \frac{n_i}{\sigma_e^2 + \sigma_A^2 \times n_i}.$$

$$\mathbb{1}_n' V^{-1} Y = \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_i \mathbb{1}_{n_i}' \left(\mathrm{Id}_{n_i} - \frac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} J_{n_i} \right) Y_i$$

$$= \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_i \left(Y_{i+} - \frac{n_i Y_{i+} \sigma_A^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} \right).$$

$$= \sum_i \frac{n_i Y_{i\bullet}}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} \longrightarrow w_i .$$

$$\boxed{\hat{\mu}_{GLS} = \frac{\sum_i w_i Y_{i\bullet}}{\sum w_i}} = \text{moyenne pondérée}.$$

↳ Quelle interprétation pour $w_i = \frac{n_i}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2}$?

$$Y_{ij} = \mu + A_i + E_{ij}$$

$$\sum_j Y_{ij} = n_i \mu + n_i A_i + \sum_j E_{ij}$$

$$1/n_i \sum_j Y_{ij} = \mu + A_i + \frac{1}{n_i} \sum_j E_{ij}$$

$$\mathbb{V}(Y_{i\bullet}) = \mathbb{V}(A_i + E_{i\bullet}) = \sigma_A^2 + \frac{1}{n_i} \sigma_e^2.$$

$$\boxed{1/\mathbb{V}(Y_{i\bullet}) = \frac{n_i}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2}.}$$

- $\mathbb{E}(\hat{\mu}_{OLS}) = \mathbb{E}(\hat{\mu}_{GLS}) = \mu$

↳ les deux estimateurs sont sans biais.

- $\mathbb{V}(\hat{\mu}_{GLS}) = \left(\sum_i \frac{n_i}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2}\right)^{-1}$.

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{OLS} = \frac{1}{n} \sum_i n_i Y_{i\cdot} \Rightarrow \mathbb{V}(\mu_{OLS}) = \frac{1}{n^2} \sum_i n_i^2 \mathbb{V}(Y_{i\cdot}) \\ \hat{\mu}_{GLS} = \frac{1}{\sum_i w_i} \sum_i w_i Y_{i\cdot} \Rightarrow \mathbb{V}(\hat{\mu}_{GLS}) = \frac{1}{(\sum w)^2} \sum w_i^2 \mathbb{V}(Y_{i\cdot}). \end{cases}$$

Rq : quand n_i = cste (cas équilibré)

$$\hat{\mu}_{OLS} = \hat{\mu}_{GLS} !.$$

Propriété : si on note $\hat{\mu}_w = \frac{\sum w_i Y_{i\cdot}}{\sum w_i}$ un estimateur avec "pondérat" w_i

alors $\mathbb{V}(\hat{\mu}_{GLS}) \leq \mathbb{V}(\hat{\mu}_w)$.

et on a aussi $\mathbb{V}(\hat{\mu}_{GLS}) \leq \mathbb{V}(\hat{\mu}_{OLS})$

→ dans le modèle à effet aléatoire (1 fact.) $\hat{\mu}_{GLS}$ est l'estimateur pondéré ayant la plus petite variance parmi ts les estimateurs pondérés fondés sur $Y_{i\cdot}$.

Estimation des paramètres de variance par la Table d'ANOVA.

→ On cherche à estimer σ_A^2, σ_e^2.

→ On utilise la Table d'Analyse de la Variance.

→ Principe : On identifie $E(SS)$ avec les paramètres de Variance.

↳ Estimateur de type moment.

Table d'ANOVA. 1 Way Design.

Source de Variation	ddl	SS	MS	F
Facteur	$I-1$	SS_A	$SS_A/_{I-1}$	$\dfrac{MS_A}{MS_E}$
Residu	$n-I$	SS_E	$SS_E/n-I$	
Total	$n-1$	SS_T	$SS_T/n-1$	

$$\rightarrow SS_T = SS_A + SS_E$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j}(Y_{ij}-Y_{..})^2 = \underbrace{\sum_{ij}(Y_{ij}-Y_{i.})^2}_{\text{Inter groupes}} + \underbrace{\sum_{ij} n_i (Y_{i.}-Y_{..})^2}_{\text{Intra Groupe}}$$

→ On souhaite calculer $\mathbb{E}(SS_A)$, $\mathbb{E}(SS_R)$

$$SS_A = \sum_i n_i (Y_{i.} - Y_{..})^2 = n_0 \sum_i (Y_{i.} - Y_{..})^2.$$

↳ On prend le cas equilibré : $n = I \times n_0$.

$$Y_{i\cdot} = \sum_j Y_{ij} / n_0 = \mu + A_i + E_{i\cdot}$$

$$Y_{\cdot\cdot} = \frac{1}{I} \sum_i Y_{i\cdot} = \mu + A_\cdot + E_{\cdot\cdot}.$$

$$SS_A = n_0 \sum_i \Big((\mu + A_i + E_{i\cdot}) - (\mu + A_\cdot - E_{\cdot\cdot}) \Big)^2$$

$$= n_0 \sum_i \Big((A_i - A_\cdot)^2 + (E_{i\cdot} - E_{\cdot\cdot})^2 \Big)^2.$$

or $E((X+Y)^2) = EX^2 + EY^2$ quand $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\mathbb{E}(SS_A) = n_0 \sum_i \Big(\underbrace{\mathbb{E}(A_i - A_\cdot)^2}_{\mathbb{V}(A_i - A_\cdot)} + \underbrace{\mathbb{E}(E_{i\cdot} - E_{\cdot\cdot})^2}_{\mathbb{V}(E_{i\cdot} - E_{\cdot\cdot})} \Big)$$

$$\mathbb{V}(A_i - A_{i\cdot}) = \mathbb{V}(A_i) + \mathbb{V}(A_{i\cdot}) - 2\operatorname{cov}(A_i, A_{i\cdot})$$

$$= \sigma_A^2 + \frac{\sigma_A^2}{I} - \frac{2\sigma_A^2}{I}$$

$$\mathbb{V}(E_{i\cdot} - E_{\cdot\cdot}) = \sigma_E^2/n_0 + \frac{\sigma_E^2}{n_0 \times I} - \frac{2 n_0 \sigma_e^2}{n_0 I n_0}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(SS_A) &= (I-1)(n_0\sigma_A^2 + \sigma_e^2). \\ \mathbb{E}(MS_A) &= n_0\sigma_A^2 + \sigma_E^2 \end{aligned}}$$

Estimateurs de type ANOVA. (11)

$$\begin{cases} \mathbb{E}\, SS_A = (I-1)\left(n_0 \sigma_A^2 + \sigma_e^2\right) \\ \mathbb{E}\, SS_E = I\,(n_0-1)\,\sigma_e^2. \end{cases}$$ Searle P60.

Estimateurs : $$\begin{cases} \hat{\sigma}_E^2 = \dfrac{SSE}{(n_0-1)\,I} \\ \hat{\sigma}_A^2 = \dfrac{MSA - MSE}{n_0} \end{cases}$$

→ Ce sont des estimateurs sans biais pour $\hat{\sigma}_e^2$ mais avec biais pour $\hat{\sigma}_A^2$. $\left(\mathbb{P}(\hat{\sigma}_A^2 < 0)\right)$.

→ très faciles à calculer.

→ $\hat{\sigma}_A^2$ peut être négatif : modélisation variance / corrélation directement ?

→ pas besoin d'hyp. de normalité.

↳ Si on a un modèle, on peut calculer $\mathbb{P}(\hat{\sigma}_A^2 < 0)$.

↳ Comment faire quand $\hat{\sigma}_A^2 < 0$.

↳ Peut être indicatif de l'utilisation d'un mauvais modèle.

↳ On met souvent les valeurs négatives à 0.

→ $Y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij} \Rightarrow \hat{\sigma}_E^2 = \dfrac{1}{(In_0-1)}\, SST$

↳ Autre technique (ML, REML).

Estimateurs du Maximum de Vraisemblance.

↳ On Considère le modèle $Y \sim N(\mu, V)$

avec $V = \{\sigma_A^2 J_{n_i} + \sigma_e^2 I_{n_i}\}_i$.

→ Correspond au modèle $A_i \sim N(0, \sigma_A^2)$.

$$\mathbb{V}(A_i) = \sigma_A^2$$

$$V(Y) = Z\,\mathbb{V}(A)\,Z' + \mathbb{V}(E)$$

→ On Considère la vraisemblance d'un vecteur gaussien

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2 ; Y) = (2\pi)^{-n/2} |V|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \| Y - \mathbb{1}\mu\|_{V^{-1}}^2\right).$$

• Elements du Calcul $|V|^{-1/2}$, $\|Y - \mathbb{1}\mu\|_{V^{-1}}^2$

• obj : maximiser $\log \mathcal{L}(\mu, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2 ; Y)$

→ V est structurée et on donne $|V|^{-1/2}$.

$$|V| = \prod_{i=1}^{I} \sigma_e^{2(n_i - 1)} (\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2)$$

$$|a I_n + b J_n| = a^{n-1}(a + bn).$$

Calcul de $\|Y - \mathbb{1}\mu\|^2_{V^{-1}}$.

$$\|Y - \mathbb{1}\mu\|^2_{V^{-1}} = {}^t(Y - \mathbb{1}\mu)\, V^{-1}\, (Y - \mathbb{1}\mu)$$

- On raisonne d'abord sur le bloc i.

$$V_i^{-1} = \left(I_{n_i} - \frac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} J_{n_i} \right) \times \frac{1}{\sigma_e^2}.$$

$$\sigma_e^2 \left\{ \|Y - \mathbb{1}\mu\|^2_{V^{-1}} \right\}_i = \underbrace{{}^t(Y - \mathbb{1}\mu)(Y - \mathbb{1}\mu)}_{\sum_j (Y_{ij} - \mu)^2} - \frac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2} \underbrace{{}^t(\ )\, J_{n_i}\, (\ )}_{\left(\sum_j Y_{ij} - \mu\right)(\ )}$$

$$\left(\underbrace{\sum_j Y_{ij} - \mu}_{}\right)(\ )^2. \quad (Y_{i+} - n_i \mu)$$

$$\sigma_e^2 \times \|Y - \mathbb{1}\mu\|^2_{V^{-1}} = \sum_{ij} (Y_{ij} - \mu)^2 - \sum_i \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_\alpha^2} \underbrace{(Y_{i+} - n_i \mu)^2}_{}.$$

$$\frac{n_i^2 \sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n_i \sigma_\alpha^2} (Y_{i\circ} - \mu)^2$$

- On cherche à faire apparaître SS_A et SS_E dans l'expression de $\|Y - \mathbb{1}\mu\|^2_{V^{-1}}$

$$\begin{cases} SS_E = \sum (Y_{ij} - Y_{\circ\circ})^2 \\ SS_A = \sum (Y_{i\circ} - Y_{\circ\circ})^2 \end{cases}$$

(On fait le cas équilibré $n_0 = n_i$.).

$$\rightarrow \sum_{ij} (Y_{ij} - \mu)^2 = \sum_{ij} (Y_{ij} - Y_{i\circ} + Y_{i\circ} - \mu)^2$$

$$\sum_i (Y_{i\circ} - \mu)^2 = \sum_i (Y_{i\circ} - Y_{\circ\circ} + Y_{\circ\circ} - \mu)^2$$

$$\|Y - \mathbb{1}\mu\|^2_{V^{-1}} = \frac{1}{\sigma_e^2}\left[SSE + \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n_0 \sigma_\alpha^2}\left[SS_A + I n_0 (Y_{\cdot\circ} - \mu)^2 \right]\right]$$

→ On a une expression de la $\log \mathcal{L}(\mu, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2; Y)$.

$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|V| - \frac{1}{2}\|Y - \mathbb{1}\mu\|^2_{V^{-1}}$$

$$-2\log \mathcal{L}(\mu, \sigma_\alpha^2, \sigma_e^2; Y) \pm \text{cste} + \underbrace{\log|V|} + \|Y - \mathbb{1}\mu\|^2_{V^{-1}}.$$

$$\sum_i (n_i - 1)\log\sigma_e^2 + \sum_i \log(\sigma_e^2 + n_i \sigma_A^2)$$

→ On dérive par rapport @ $\mu, \sigma_A^2, \sigma_e^2$: (solut° ds le cas équilibré)

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{ML} = Y_{\circ\circ} \\ \hat{\sigma}^2_{A\,ML} = \dfrac{(1 - 1/I)\,MSA - MSE}{n_0} \\ \hat{\sigma}^2_{e\,ML} = MSE = \dfrac{SSE}{n_0 I} \end{cases}$$

$MSA = SSA/(I-1)$

⇒ peut être < 0.

↳ On n'a pas max. avec contrainte de support.

Comparaison avec $\sigma_A^2(\text{ANOVA}) = \frac{1}{n_0}(MSA - MSE)$.

Estimation par maximum de vraisemblance Restreint

→ Motivation : - historiquement ML n'était pas trop utilisé pour des raisons computationnelles (inversion de V, lenteur de convergence).

- en plus MLE biaisé pour les variances.

- REML (1971) : garder l'avantage des MLE mais corriger le biais.

Illustration : $Y = X\beta + \varepsilon$ $\quad \varepsilon \sim N(0, I_n \sigma^2)$

β de taille p.

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n} \|Y - X\hat{\beta}\|^2 \\ \sigma^2_{REML} = \frac{1}{n-p} \|Y - X\beta\|^2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left(\hat{\sigma}^2_{ML} - \sigma^2\right) = -\sigma^2 \frac{p}{n}.$$

↳ le biais augmente avec p.

→ devient critique qd n est petit.

→ Idée : . utiliser une vraisemblance fondée sur les résidus plutôt que sur les obs.

. prendre en compte la perte de ddl associée à l'estimat des effets fixes en maximisant une vraisemblance qui sépare les parties Esp / Variance.

→ Calculer d'abord les est. des effets fixes, prendre les résidus et estimer les variance d'après ces résidus.

Dans le cas équilibré :

→ étant donné que $\hat{\mu} \perp\!\!\!\perp SSA, SSE$,

On peut écrire :

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma_e^2, \sigma_A^2 ; y) = \mathcal{L}(\mu ; y_{\cdot\cdot}) \times \mathcal{L}(\sigma_e^2, \sigma_A^2 ; SSA, SSE)$$

vraisemblance pour μ étant donné la stat exhaustive $y_{\cdot\cdot}$

vraisemb. de σ_e^2, σ_A^2 étant donné les stat exh. SSA, SSE.

↳ Pour l'estimat° REML, on maximise $\mathcal{L}(\sigma_e^2, \sigma_A^2 ; SSA, SSE)$.

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_e^2 = \dfrac{SSE}{I_0(n_0 - 1)} \\ \hat{\sigma}_A^2 = \dfrac{1}{n_0}(MSA - MSE). \end{cases}$$

$$\left(MSA = \frac{SSA}{I-1}\right)$$

Recapitulation : . 3 méthodes d'estimation : pour σ_e^2 et σ_A^2
ANOVA, ML, REML.

. On a fait les calculs pour le cas équilibré.

	ANOVA	ML	REML
$\hat{\sigma}_e^2$	$\frac{SSE}{I(n_o-1)}$	$\frac{SSE}{I(n_o-1)}$	$\frac{SSE}{I(n_o-1)}$
$\hat{\sigma}_A^2$	$\frac{MSA-MSE}{n_o}$	$\frac{(1-1/I)\,MSA-MSE}{n_o}$	$\frac{MSA-MSE}{n_o}$

$$MSA = \frac{SSA}{(I-1)} \qquad MSA = \frac{SSA}{I-1}$$

$$MSE = \frac{SSE}{I(n_o-1)}$$

- les estimateurs ANOVA et REML sont les m̂ dans le cas équilibré.
- les conditions pour lesquelles $\hat{\sigma}_A^2 < 0$ ne sont pas les mêmes pour ML et REML

↳ vient du fait que pour REML ⇒ $SSA/(I-1)$ et pas $/I$. (ML)

- Biais :
  - . ANOVA : non biaisé pour $\hat{\sigma}_e$ et non biaisé pour σ_A^2.
  - . ML : non biaisé pour σ_e^2 et biaisé pour σ_A^2.
  - . REML : non biaisé pour σ_e^2 et non biaisé pour σ_A^2.

Hypothèse de normalité et test sur les paramètres.

- On peut dériver certains estimateurs sous le modèle Gaussien (ANOVA).
- Si on veut $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ pour les estimateurs il faut choisir un modèle
- idem pour tester les effets des facteurs.

Modèle Gaussien : $Y_i = \mu + A_i + \varepsilon_{ij}$

$A_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$ $\quad A_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_{ij}$

$\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$

- loi des sommes de carré.

$$\frac{SSA}{n_0 \sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \sim \chi^2 (I-1)$$

$$\frac{SSE}{\sigma_e^2} \sim \chi^2_{I(n_0-1)}$$

on admet que

$SSA \perp\!\!\!\perp SSE$

(Th. de Cochran)

Test de l'effet du facteur Aléatoire.

→ Dans un modèle à effets fixes
$$\mathcal{H}_0 = \{ \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I \}.$$
↳ tous les niveaux sont égaux → pour des niveaux choisis et fixes.

→ Dans un modèle à effet Aléatoire on n'échantillonne qu'un ensemble possible.
↳ A_i n'est pas intéressant en soi
↳ c'est la variabilité liée à l'effet qui nous intéresse :
$$\mathcal{H}_0 = \{ \sigma_A^2 = 0 \}.$$

→ Modèle à effet fixe : $\boxed{E(SS_A) = (I-1)\,\sigma_e^2}$

$$F_\alpha = \frac{SSA / I-1}{SSE / I(n_0-1)} \sim \mathcal{F}_{I-1,\,(n_0-1)I}$$

$= MSA/MSE$

stat. de Fisher pour tester l'effet fixe α.

$$\frac{SSA}{\sigma_e^2} \sim \chi^2(I-1)$$

→ Modèle à effet Aléatoire : $\boxed{E(SSA) = (I-1)(n_0\sigma_A^2 + \sigma_e^2)}$

↳ $$\frac{MSA/(n_0\sigma_A^2 + \sigma_e^2)}{MSE/\sigma_e^2} = F_A \sim \mathcal{F}_{(I-1),(n_0-1)I}$$

stat de Fisher pour tester l'effet Aléatoire A

→ Mais sous $\mathcal{H}_0 : \{ \sigma_A^2 = 0 \}$.

$$F_A = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2 + n_0 \sigma_A^2} f_\alpha \underset{\mathcal{H}_0}{=} F_\alpha . \ !!!$$

↳ les lois sont les m̂ sous $\mathcal{H}_0$ mais pas sous $\mathcal{H}_1$!

→ Sur les tests des effets, c'est quand on aura des effets fixes et aléatoires que la modélisation en effets mixtes deviendra intéressante car on teste les effets fixes par rapport à d'autres variabilités que la variabilité résiduelle.

→ On peut aussi construire des IC pour

$$\sigma_e^2 , \ \frac{\sigma_a^2}{\sigma_e^2 + \sigma_a^2} , \ \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2} .$$

$$IC(\sigma_e^2) = \left[\frac{SSE}{\chi^2_{I(n_0-1),U}} , \frac{SSE}{\chi^2_{I(n_0-1),L}} \right]$$

↳ pour σ_A^2.

on utilise plutôt $\sigma_A^2 / \sigma_A^2 + \sigma_E^2$ = corrélation intra classe.